

Качественные задачи

1. Апельсины и яблоки

«В отличие от многих моих знакомых, которые едят всё подряд без разбора, я люблю апельсины и терпеть не могу яблоки. Поэтому мне незачем опасаться запрета на ввоз яблок, который правительство может ввести со следующего месяца: даже если запрет будет введён, это никак не скажется на моём благосостоянии».

Есть ли в этих рассуждениях ошибка?

Решение

Запрет на ввоз яблок уменьшит предложение яблок и таким образом поднимет их цену. Люди, для которых яблоки и апельсины — товары-заменители, при подорожании яблок увеличат спрос на апельсины. Это поднимет цену апельсинов и таким образом снизит благосостояние автора высказывания.

2. Торговля между А и Б

Рассмотрим торговый обмен между двумя странами, когда первая страна отдала некоторый набор товаров А и получила взамен некоторый набор Б. Если ценность набора А выше ценности набора Б, то первая страна проиграла от этой сделки, а вторая выиграла. Если ценность А ниже ценности Б, то, наоборот, первая выиграла, а вторая проиграла. Если же эти наборы имеют одинаковую ценность, то от этой сделки не выиграл никто, и страны лишь зря потратили ресурсы на перевозку товаров. Из этого примера становится ясно, что торговля не может приносить выгоду обеим сторонам.

Есть ли в этих рассуждениях ошибка?

Решение

Ценность субъективна: для одного человека набор А ценнее (предпочтительнее) набора Б (то есть, если бы он выбирал между этими двумя наборами при прочих равных условиях, то он выбрал бы А), для другого человека — наоборот, набор Б ценнее набора А. Обмен между двумя такими людьми может быть выгодным для обоих. Таким образом, ошибка в приведённых в условии рассуждениях заключается в предположении о том, что существует некоторая объективная числовая характеристика набора товаров, такая что любой человек предпочтёт тот набор, у которого эта характеристика выше.

3. Бумажное оружие

Во время Второй мировой войны Англия и Германия собирались печатать наличные деньги своего противника и разбрасывать их с самолетов над его территорией. Как это помогло бы достижению военных целей этих стран?

Решение

Коротко: разбрасывание денег вызывает гиперинфляцию, что имеет разрушительные последствия для экономики. Подробно. Когда у человека растёт доход (например, потому что с неба на него упали деньги), он увеличивает спрос на многие товары. Увеличение спроса на конкретный товар ведёт к росту его цены; таким образом, разбрасывание денег с самолётов повышает цены практически на все товары. В результате этого теряют ценность все деньги, имеющиеся на руках у населения (на ту же сумму теперь можно купить меньше товаров, чем раньше). Ожидая, что цены резко вырастут (после очередного налёта), каждый стремится избавиться от имеющихся у него наличных денег — купить на них что-нибудь, пока они не обесценились. В результате деньги уже не могут использоваться как средство обмена товарами и услугами; люди вынуждены переходить на бартер, что существенно затрудняет обмен товарами и услугами; в том числе, теми, что необходимы для ведения войны. Добавим, что на протяжении последних 150 лет правительства всех стран во время войн печатают деньги (потому что им нужно гораздо больше товаров и услуг, чем в мирное время), поэтому даже слух о том, что враг разбрасывает деньги, ведёт к росту цен и вынуждает печатать ещё больше.

4. Купоны и спрятанные ценники

Приведите единое объяснение для следующих двух историй.

- 1) Некоторые фирмы печатают в газетах, размещают на своём сайте или просто раздают на улицах купоны, предоставляющие их обладателю скидку при приобретении услуг данной фирмы. Если они таким образом хотят привлечь покупателей более низкой стоимостью услуг, то почему бы им просто не снизить цену и не объявить об этом, вместо того чтобы раздавать купоны?
- 2) Во многих обувных магазинах ценники спрятаны внутрь обуви (или приклеены на подошву), так что тому, кто ищет низкую цену, приходится вручную перебирать все модели, что довольно хлопотно; подобная картина

наблюдается и во многих магазинах одежды. Это повышает риск того, что покупатель не найдёт подходящей по цене модели и уйдёт ни с чем. Зачем тогда магазин прячет ценники?

Решение

За одни и те же блага разные люди готовы платить разную цену: богатые готовы платить больше, чем бедные. Если продавать товары одним (богатым) покупателям по более высокой цене, а другим (бедным) — по более низкой, то можно получить прибыль больше, чем если продавать всем по одной цене. Проблема в том, что по внешнему виду покупателя трудно определить, богатый он или бедный, а если магазин повесит на один и тот же товар два различных ценника — для богатых и для бедных, то это станет практически невозможно. Потенциальный путь решения этой проблемы — продавать два вида товаров (дешёвый и дорогой), такие что бедные предпочтут купить дешёвый товар, а богатые — дорогой. Естественно, товары должны чем-то отличаться, иначе богатые тоже выберут дешёвый. В примерах из данной задачи таким отличием является то, что для покупки дешёвого товара нужно потратить больше времени, чем для покупки дорогого. Как мы помним, за одно и то же благо богатый человек готов платить больше, чем бедный. Это относится и к такому благу, как свободное время. Бедные готовы потратить время, чтобы перебрать все модели в магазине в поисках низкой цены; они готовы при случае поискать купон на скидку, а также могут собирать такие купоны впрок. Богатые же, если разница в ценах не очень велика, предпочтут купить первую понравившуюся модель, не тратя время на поиск низкой цены или купона.

5. Падение благосостояния

В 1973 году, в целях улучшения положения бедных слоев населения, в ряде штатов США был введен закон, запрещающий в случае банкротства заемщика отчуждать у него дом, используемый в качестве залога по кредиту. Тем не менее, исследования показали, что в результате принятия этого закона благосостояние бедных людей только ухудшилось. Как это можно объяснить?

Решение

Бедные люди не имеют высокооплачиваемой работы, поэтому для многих из них единственная возможность подтвердить свою способность вернуть кредит — предоставить свой дом в залог. Если лишить их этой возможности, то они либо совсем не смогут получить кредит, либо смогут, но по более высокой ставке, чем кредит под залог дома. Можно объяснить это следующим образом. Если нет залога, то повышается риск невозврата; предоставление кредита заемщику с низким и заемщику с высоким риском невозврата — это разные услуги с точки зрения банка; при одинаковой ставке процента и объёме кредита банк строго предпочёл бы оказать первую услугу, чем вторую; поэтому в равновесии не может получиться так, что цена этих услуг (ставка процента) одинакова. Заметим, что если этот закон действует и на уже заключённые кредитные договора, то в результате его принятия благосостояние некоторых людей могло улучшиться — тех, кто взял кредит под залог дома на старых условиях, не вернул его, и при этом остался при своём доме.

6. Уничтожение денег

Предположим, что вышел указ, в соответствии с которым каждый житель страны X должен сжечь по 1000 рублей (рубли — денежная единица страны X), и этот указ был выполнен. Есть ли среди жителей страны X такие, чьё благосостояние в результате этого выросло? (Считаем, что благосостояние жителя зависит только от потребляемых им товаров и услуг.)

Решение

Деньги важны их обладателю лишь в той мере, в которой они могут быть обменены на полезные для него товары. Чтобы определить, выросло или уменьшилось благосостояние человека в результате всеобщего выполнения указа, нужно понять, большее или меньшее (по сравнению с ситуацией до указа) количество товаров теперь может купить человек на имеющиеся у него деньги. Какие бы ни были цены в данный конкретный момент, если только они одинаковы для разных покупателей, покупатель А, у которого в k раз больше денег, чем у покупателя Б, может купить на свои деньги в k раз больший набор товаров, чем покупатель Б. Поскольку сжигание денег не изменило общего количества товаров в экономике, благосостояние данного конкретного человека выросло в том и только в том случае, если выросла доля имеющихся у него денег среди денег всех жителей. Если отнять одинаковую сумму денег у каждого человека, то эта доля вырастет у того, кто был богаче среднего, и упадёт у того, кто был беднее среднего. Убедимся в этом формально. Пусть n — число жителей в стране, i -й человек имеет $x_i^0 \geq 1000$ рублей; после сжигания денег он имеет $x_i^1 = x_i^0 - 1000$ рублей. Обозначим: X^0 и $X^1 = X^0 - 1000n$ — общее количество денег в стране до и после указа; α_i^0 и α_i^1 — старая и новая доли этого человека в общем количестве денег. Отношение новой и старой долей равно:

$$\frac{\alpha_i^1}{\alpha_i^0} = \frac{x_i^1/X^1}{x_i^0/X^0} = \frac{x_i^1/x_i^0}{X^1/X^0} = \frac{(x_i^0 - 1000)/x_i^0}{(X^0 - 1000n)/X^0} = \frac{1 - \frac{1000}{x_i^0}}{1 - \frac{1000}{X^0/n}}$$

$$\frac{\alpha_i^1}{\alpha_i^0} \geq 1 \Leftrightarrow x_i^0 \geq X^0/n$$

Таким образом, если только количество денег до указа не было одинаковым у всех жителей страны, найдётся человек, благосостояние которого выросло.

7. Разбросанные участки

Во многих деревнях в развивающихся странах участки земли, которыми владеет конкретная семья, оказываются раскиданы по всей деревне, хотя, казалось бы, гораздо удобнее, когда все участки находятся друг рядом с другом. Было предложено следующее объяснение: земельные владения данной семьи формируются в момент женитьбы; жених и невеста получают от своих родителей участки, которые, естественно, вовсе не обязательно находятся рядом. Потом их дети получают в наследство фрагменты этих участков, объединяя их с участками, доставшимися в наследство супругу. Такое происходит в каждом поколении, в результате чего и получается, что у каждой семьи участки рассредоточены по всей деревне.

- (а) Можете ли Вы из экономических соображений отвергнуть эту версию объяснения?
- (б) Предложите альтернативную версию.

Решение

а) Если предлагаемое объяснение верно, и, таким образом, участки формируются под влиянием некоторого фактора, не связанного с удобством пользования ими, то распределение участков наверняка получится неэффективным: некоторые семьи могли бы обменяться имеющимися участками так, что всем им станет лучше. Но если был возможен взаимовыгодный обмен, то почему он не происходил? Выходит, что приведённое в условии объяснение либо неверное, либо неполное (требуется дополнительно указать, какие ограничения препятствовали осуществлению взаимовыгодного обмена).

8. Причина и следствие

Понимание причинно-следственных связей между различными явлениями очень важно для эффективного принятия решений – как в области экономической политики, так и в быту. Однако сделать правильный вывод о причинно-следственной связи, наблюдая статистику, не так просто. Следующие примеры иллюстрируют ошибки, которые легко допустить при поверхностном анализе. Примеры, иллюстрирующие похожие ошибки, объединены в группы. Для каждой группы:

- (а) объясните для каждого из примеров в отдельности, почему сделанный вывод неверен;
- (б) сформулируйте, какой общий тип ошибки иллюстрируют примеры данной группы;
- (в) приведите другой пример, иллюстрирующий тот же тип ошибки.

I

- 1) Замечено, что в те дни, в которые на пляжах покупают больше мороженого, происходит и больше несчастных случаев на воде. Значит, если ограничить потребление мороженого, риск несчастного случая уменьшится.
- 2) Среди школьников США, получающих бесплатные обеды, показатели успеваемости в среднем ниже, чем среди их одноклассников, не получающих бесплатных обедов. Это служит убедительным аргументом в пользу того, что бесплатные обеды являются менее качественными, чем то, что едят школьники, питающиеся за свой счёт.

II

- 1) Дворник Василий Иванович несколько лет подряд наблюдал такую картину: вскоре после того как десяток-другой жителей дома №48 выходили на крышу, начинался фейерверк. Так было и на Новый год, и на День Победы, и на День города; закономерность ни разу не была нарушена. Василий Иванович ложится спать рано и не любит шум. Наконец он понял, как решить эту проблему: в преддверии очередного праздника он повесил замок на дверь, ведущую на крышу. Теперь он может быть уверен, что фейерверк не потревожит его сон.
- 2) «Как только я нанял телохранителя, страховая компания стала требовать более высокую плату за страхование моей жизни, объясняя это тем, что теперь они исходят из более высокой вероятности моей смерти в ближайшем будущем. Это произвело на меня глубокое впечатление. У них большой опыт и накопленная статистика, им виднее; я хочу пожить подольше, поэтому я решил поскорее уволить телохранителя».

III

- 1) Исследования показали, что люди, прошедшие курсы переквалификации во время кризиса, быстрее смогли найти работу, чем те, кто не прошел эти курсы. Значит, эти курсы помогают найти работу.
- 2) В стране X конкурируют компании А и Б, специализирующиеся на консультировании индивидуальных инвесторов. Каждый год публикуется статистика о том, сколько за прошедший год заработал каждый из инвесторов, присутствующих на рынке не меньше года. Статистика регулярно показывает, что средняя доходность вложений клиентов компании А выше, чем средняя доходность вложений клиентов компании Б. Значит, если некоторый инвестор воспользуется услугами компании А, то доходность его вложений, скорее всего, будет выше,

чем если он воспользуется услугами компании Б.

IV

- 1) Одна кинокомпания заметила, что снятые ею сиквелы (продолжения) её же фильмов почти всегда нравятся зрителям меньше, чем первый фильм. Поэтому, если её цель – снять как можно более интересный для зрителей фильм, ей следует снять фильм на новый сценарий, не связанный с предыдущими фильмами, так как при прочих равных условиях ожидаемый кинокомпанией зрительский успех у такого фильма выше, чем у сиквела.
- 2) Замечено, что, в большинстве случаев, после того как родители ругают ребёнка за полученную оценку, его средний балл растёт, а после того как родители хвалят его за полученную оценку, его средний балл падает. Значит, если родители хотят, чтобы ребёнок имел как можно более высокий средний балл, за полученные оценки его нужно ругать, но нельзя хвалить.

Решение

Все примеры этой задачи построены так: описаны некоторые статистические наблюдения, из которых затем делается вывод. В решении, которое приводится ниже, для каждого из примеров приведено альтернативное объяснение имеющихся статистических наблюдений, которое противоречит сделанному выводу; существование такого объяснения доказывает, что вывод был получен некорректно. Мы не знаем, какое из альтернативных объяснений верно (возможно, и никакое), зато теперь мы знаем, что описанных наблюдений недостаточно, чтобы утверждать, что верным является именно тот вывод, который был сделан в условии. Разделение примеров на группы достаточно условное. То общее между примерами группы, что описано ниже в пунктах б), относится не столько к логическим ошибкам, сколько к способу получения альтернативных объяснений.

I

а)

- 1) Возможно, число несчастных случаев никак не зависит от объёма потребления мороженого при прочих равных условиях, а положительная корреляция между этими двумя переменными объясняется тем, что обе они увеличиваются при росте числа посетителей пляжа.

Справка. Говорят, что наблюдается положительная корреляция между переменными x и y , если в фактических наблюдениях вида (x_i, y_i) большим значениям одной переменной соответствуют большие значения другой переменной. Иными словами, в тех случаях, когда одна переменная принимала относительно большие значения, вторая переменная тоже принимала относительно большие значения; когда первая принимала относительно маленькие, вторая тоже принимала относительно маленькие.

Отрицательная корреляция — когда большим значениям одной переменной соответствуют меньшие значения другой переменной.

Отличие причинно-следственной связи от корреляции заключается в наличии предпосылки «при прочих равных условиях». Так, фраза «переменная x влияет на переменную y » означает, что если изменить x , оставив неизменным всё остальное (кроме y), то y изменится.

- 2) Как нетрудно догадаться, бесплатные обеды предоставляются школьникам из семей с низкими доходами. Значит, если доход семьи по какой-то причине положительно коррелирует с оценками ребёнка, то средние оценки в группах тех, кто получает бесплатные обеды, могут быть ниже, чем в группах тех, кто не получает бесплатных обедов, даже если обеды при прочих равных условиях никак не влияют на оценки. Причиной положительной корреляции между доходом семьи и оценками ребёнка, например, могут быть способности, передающиеся по наследству: способности родителей приводят к их высоким заработкам, а полученные по наследству способности их детей приводят к их высоким оценкам.

б) Вывод о наличии причинно-следственной связи сделан лишь на основе корреляции. Это корреляция, скорее всего, объясняется изменением неучтённой переменной.

II

а)

- 1) Фейерверк начинается вне зависимости от того, выходят жители дома №48 на крышу или нет; напротив, это жители выходили на крышу потому, что ожидали фейерверк.

- 2) Страховая компания стала требовать более высокую плату потому, что получила информацию о возросшей вероятности смерти страхователя в ближайшем будущем; для того, чтобы вывод компании был верен, достаточно положительной корреляции между риском смерти и наличием телохранителя. Корреляция между риском смерти и наличием телохранителя может быть положительной, даже если зависимость риска смерти от наличия телохранителя (при прочих равных условиях) отрицательная. Страхователь нанял телохранителя потому, что существует угроза его жизни, однако он ошибочно интерпретировал вывод страховой компании так, как будто бы наоборот, наличие телохранителя повышает эту угрозу.

б) Из-за непонимания различия между корреляцией и причинно-следственной связью перепутана причина и следствие.

III

а)

1) Сравнение времени, за которое человек нашёл работу, между двумя группами — теми, кто посещал курсы, и теми, кто не посещал их, — не является корректным основанием для вывода о причинной зависимости этого времени от факта посещения курсов, т.к. отбор в эти группы происходил не случайно и поэтому факт посещения курсов может быть скоррелирован с некоторым неучтённым фактором, который влияет на время нахождения работы. Например, таким фактором может быть целеустремлённость человека, желание поскорее найти работу. Целеустремлённый человек, с одной стороны, запишется на курсы (предполагая, что курсы помогут), с другой стороны, будет активнее искать вакансии, более ответственно готовиться к собеседованиям и т.п. — по сравнению с теми, кто не записался на курсы. Он найдёт работу быстрее, чем те, кто не записался на курсы, даже если курсы на самом деле никак не помогают найти работу.

2) Среди инвесторов, присутствующих на рынке не меньше года, средняя доходность вложений клиентов компании А выше, чем средняя доходность вложений клиентов компании Б. Но срок пребывания на рынке сам зависит от доходности: клиент, который быстро разорился, уходит с рынка, не успев пробыть на нём год. То есть отбор в группы сравнения сам зависит от изучаемой переменной — доходности, что делает данное сравнение некорректным для вывода о том, где ожидаемая доходность выше. Возможно такое, что большинство клиентов компании А разоряются, но те, кто не разорился, имеют очень высокую доходность (например, компания А вкладывает деньги клиентов в очень рискованные, но потенциально очень прибыльные проекты). Потенциальный клиент компании А заранее не знает, попадёт он в число разорившихся или в число разбогатевших, и его скорее интересует средняя доходность по всем клиентам компании А, а не только по тем, кто продержался на рынке больше года. Средняя доходность по всем клиентам компании А вполне может оказаться меньше, чем средняя доходность по всем клиентам компании Б (например, компания Б вкладывает деньги клиентов в активы, приносящие стабильный, хоть и невысокий доход).

б) Отбор в группы сравнения сам зависит от переменной, влияние на которую исследуется с помощью этого сравнения.

IV

а)

1) В условии дана статистика, сравнивающая фильм с его сиквелом, а вывод из этого делается о сравнении сиквела с новым фильмом, что некорректно. Вполне возможно, что ожидаемый успех у сиквела ровно такой же, как и у нового фильма. То, что сиквелы данной кинокомпании хуже своих предшественников, может иметь следующее объяснение: сиквелы снимают только на те фильмы, которые имели большой успех, так что не удивительно, что этот успех не удаётся повторить со следующей же попытки. Кинокомпания всегда старается снять как можно более хороший фильм, но фактический успех зависит не только от стараний, но и от случайных факторов, которые она не в состоянии предугадать или проконтролировать. Вновь снятый фильм (как сиквел, так и не сиквел) скорее будет иметь «средний» успех, чем большой успех, что и объясняет описанную в условии закономерность.

2) Родители хвалят ребёнка за высокие оценки, а ругают за низкие. Оценки (особенно за контрольные) зависят от случайных факторов, которые ребёнок не может контролировать, так что при одинаковом уровне стараний ребёнок может получать разные оценки. Средний балл растёт, если вновь полученная оценка выше среднего балла, и падает, если ниже. Рассмотрим пример. Ребёнок получает только тройки, четвёрки и пятёрки. Пусть по итогам n -й оценок средний балл равен 4,0. Если $n+1$ -я оценка — 5, то средний балл станет выше 4. И если затем $n+2$ -я оценка будет 4 или 3 (что, судя по среднему баллу, более вероятно, чем то, что она будет 5), то средний балл упадёт. Таким образом, стоит ожидать, что следующая оценка после получения пятёрки понизит средний балл. Аналогичным образом можно убедиться в том, что после получения тройки средний балл, скорее всего, вырастет. Эта закономерность будет иметь место, даже если похвала и порицание со стороны родителей никак не влияют на оценки.

б) Возврат к среднему значению после случайного отклонения ошибочно используется в качестве доказательства некоторой причинно-следственной связи.

9. Может ли быть так?

(а) Может ли быть так, что выручка фирмы вырастет, если фирма снизит цену на свою продукцию?

(б) Может ли быть так, что сумма налоговых поступлений, полученных государством, вырастет, если государство снизит ставку налога?

(в) Может ли быть так, что количество водителей, погибающих в дорожно-транспортных происшествиях, вырастет, если власти (скажем, с помощью повышения размера штрафа) добьются того, что больше водителей будут пристегиваться ремнями безопасности?

(г) Что общего в этих трёх примерах? Приведите другой пример, аналогичный этим трём.

Решение

а) Да. Выручка равна произведению цены и объёма спроса. Поскольку при снижении цены объём спроса растёт, то выручка может увеличиться. Например, если спрос задаётся функцией $Q(P)=100-P$, $0 \leq P \leq 100$: если текущая цена больше 50, то её можно снизить так, что выручка увеличится.

б) Да. Рассмотрим, например, налог на прибыль. Сумма налоговых поступлений от данного налога равна произведению ставки налога на объём налогооблагаемой базы (т.е., в данном случае, — на суммарный объём прибыли). Если ставка налога на прибыль растёт, приближаясь к 100%, то падают стимулы прилагать усилия для получения высокой прибыли, и объём налогооблагаемой базы снижается. Соответственно, если очень высокую ставку налога снизить, сделав не такой высокой, то объём налогооблагаемой базы и сумма налоговых поступлений могут вырасти.

в) Для простоты анализа рассмотрим случай, когда можно пренебречь опасностью столкнуться с другой машиной (например, если движение в каждую сторону достаточно свободное, а встречные полосы разделены бетонным заграждением), и водители могут погибнуть лишь оттого, что их занесёт на повороте и они улетят в кювет. Водитель может выбрать либо осторожную стратегию (ехать не слишком быстро), и тогда он точно не улетит в кювет, либо неосторожную (чтобы доехать побыстрее или чтобы испытать острые ощущения), и тогда он с некоторой вероятностью погибнет. Ожидаемое число погибших водителей равно произведению числа водителей, выбравших неосторожную стратегию, на вероятность того, что отдельно взятый неосторожный водитель погибнет. Для тех, кто раньше предпочитал не пристёгиваться, а сейчас (после повышения штрафов) вынужден пристёгиваться, неосторожное поведение становится менее опасным для жизни (ремень безопасности спасает жизнь в ряде случаев при аварии). Можно трактовать это так, что снизилась цена блага «быстрая езда». В результате водители увеличат потребление этого блага, то есть большее число водителей выберет неосторожную стратегию. В итоге количество погибающих водителей может вырасти, несмотря на то, что вероятность погибнуть при неосторожном вождении снизилась.

г) В этих трёх примерах рассматривается некоторая величина Z , равная произведению положительных величин X и Y . При снижении X величина Z может вырасти, если Y зависит от X , точнее, если Y растёт вследствие снижения X .

10. Как это работает?

(а) Для каждого из следующих примеров объясните его механизм:

- 1) Если все подумают, что цены скоро вырастут, то цены и правда вырастут.
- 2) Если все подумают, что банк неплатёжеспособный, то он в действительности станет неплатёжеспособным.
- 3) Если все фирмы в стране посчитают, что реализовывать их инвестиционные проекты невыгодно, то действительно для каждого из этих проектов упадёт доходность, которую фирма получила бы в случае его реализации.
- 4) Если все станут считать, что выпускники вуза А зарабатывают в среднем больше, чем выпускники вуза Б, то через несколько лет, скорее всего, это станет правдой, даже если изначально вузы не отличались по уровню средних зарплат своих выпускников.
- 5) Если все сотрудники компании считают, что сотрудник Х в будущем обязательно станет генеральным директором, то это повысит его шансы стать генеральным директором.

(б) Какая общая идея объединяет все эти примеры?

(в) Приведите другой пример на эту же идею.

Решение

а)

1) Ожидание роста цен в ближайшем будущем повышает текущий спрос, что само по себе приводит к увеличению цены. Ниже приводятся несколько возможных объяснений.

- Если человек ожидает, что в ближайшем будущем вырастет цена товара, который он и так планировал покупать, то это стимулирует его купить этот товар быстрее, пока он ещё не подорожал.
- Если человек ожидает, что вырастет цена товара, который он не планировал покупать, но который не сильно теряет стоимость при перепродаже, то он может захотеть купить этот товар, чтобы заработать на перепродаже — купить по текущей цене и затем, когда цена вырастет, продать по более высокой.
- Если человек ожидает, что вырастут цены на многие товары, так что покупательная способность имеющихся у него наличных денег ощутимо упадёт, он захочет, пока этого ещё не произошло, обменять эти деньги на какие-нибудь товары.

2) Если человек думает, что банк неплатёжеспособный (то есть не в состоянии заплатить по всем предъявляемым ему обязательствам), то этот человек захочет поскорее забрать свои деньги из банка (иначе его могут опередить другие вкладчики этого банка, и тогда банк обанкротится раньше, чем данный человек успеет забрать свои деньги). Если так думают все вкладчики этого банка, то все они прибегут и потребуют обналичить свой счёт; но поскольку большую часть собранных денег банк выдаёт в кредит, он точно не может заплатить по всем своим обязательствам разом (банк определяет объём наличных денег в кассе исходя из того, какую сумму обналичивают его вкладчики в типичный день — пусть и с некоторым запасом; если бы банк держал все собранные деньги наготове в кассе, не выдавая кредитов, он бы не мог получать прибыль).

Примечание. Сейчас практически во всех странах существуют системы страхования вкладов: все банки страны

делают регулярные отчисления в единый фонд страхования вкладов, и если какой-то банк оказывается неплатёжеспособным, то его вкладчикам выплачиваются деньги из этого фонда; это существенно снижает вероятность паники и «набега» вкладчиков на банк, т.к. теперь те, кто не успел забрать свои деньги, всё равно получают их, хоть и с некоторыми потерями (с некоторой задержкой во времени, с потерей процентов, а также с потерей части вклада, превышающей некоторый установленный порог). Если эти потери достаточно существенны или если есть опасения в платёжеспособности фонда страхования вкладов (например, если в экономике кризис и многие банки разоряются, что истощает фонд), то набег на банк может иметь место и при наличии системы страхования вкладов.

3) Если все остальные фирмы, кроме данной, посчитают, что реализовывать их инвестиционные проекты невыгодно и, соответственно, не станут их реализовывать, то они не наймут соответствующих сотрудников и подрядчиков, не купят сырьё и т.д. — то есть не создадут доход другим экономическим агентам. А чем меньше доход этих экономических агентов, тем меньше спрос на нужные им товары, в том числе и на продукцию нашей фирмы (ведь среди них есть те, кто покупает продукцию данной фирмы). Уменьшившийся спрос на продукцию данной фирмы уменьшает доходность её инвестиционных проектов.

4) Абитуриенты, которые в будущем хотят зарабатывать больше денег, постараются попасть в вуз, который, по их мнению, лучше всего помогает добиться этой цели. Если абитуриент считает, что выпускники вуза А зарабатывают больше, чем выпускники вуза Б, то он может предположить, что это происходит потому, что в вузе А лучше учат, и захочет попасть в этот вуз больше, чем в вуз Б. Если так думают все абитуриенты, то все они захотят пойти в вуз А, а не Б, но поскольку места распределяются по результатам экзаменов, в вузе А окажутся более способные абитуриенты; в вузе Б окажутся те, кто не смог попасть в вуз А. Но при прочих равных условиях чем выше способности человека, тем выше его зарплата (ведь работодатели предпочитают более способных работников менее способным и поэтому конкурируют за более способных работников). Вот и получится, что выпускники вуза А будут в среднем зарабатывать больше, чем выпускники вуза Б.

5) Если все сотрудники компании считают, что сотрудник X в будущем обязательно станет генеральным директором (и таким образом их карьера будет во многом зависеть от отношения сотрудника X к ним), они будут стараться наладить хорошие отношения с сотрудником X, помогая ему. Но помощь коллег позволит ему более успешно выполнять свои производственные обязанности, и текущее начальство с большей вероятностью его повысит; чем выше должность сотрудника, тем больше вероятность, что он вскоре окажется в самой высокой должности — генерального директора.

б) Всё это примеры самосбывающихся ожиданий. В описанных здесь ситуациях ожидание некоторого события (пусть даже и не имеющее под собой никаких оснований) приводит к такому поведению людей (преследующих собственные интересы), которое само по себе вызывает это событие, повышает его вероятность или его масштабы.

Математические задачи

1. Алюминиевые огурцы

Фирма предпринимателя Ц. занимается выращиванием алюминиевых огурцов. Производство одного огурца обходится фирме в 1 рубль. Если фирма назначит цену $\$ P \leq 9$ за огурец, то потребители будут готовы купить в общей сложности $\$ 100 \cdot \left(9 - \frac{P}{9}\right)$ огурцов; при $\$ P > 9$ желающих покупать огурцы не найдётся.

- (а) Фирма хотела бы, чтобы ее прибыль (разница между выручкой и издержками) была как можно больше. Какую цену за огурец ей разумно назначить?
- (б) Государство, в лице чиновника Ч., вводит налог: с каждого проданного огурца предприниматель должен уплатить 1 рубль в бюджет. Стоит ли предпринимателю Ц. перекладывать весь этот налог на покупателя, добавляя рубль к старой цене? Найдите цену за огурец, которую назначит предприниматель в новых условиях.
- (в) Насколько уменьшится прибыль предпринимателя из-за введения налога? Какую сумму налоговых поступлений получит государство? Верно ли, что сумма, полученная государством, в точности равна потерям предпринимателя? Если ваш ответ — нет, то в чем причина возникшего расхождения между этими величинами?
- (г) Предприниматель рассматривает возможность преподнесения чиновнику «подарка»; если чиновник примет «подарок», то введенный ранее налог будет отменен. Чиновник, однако, не готов принять «подарок», если его денежная стоимость будет меньше, чем сумма получаемых им налоговых поступлений. Пусть $\$ X$ — денежная стоимость подарка. Существуют ли значения $\$ X$, при которых сделка будет выгодна обоим? Если да, то укажите все такие значения $\$ X$.

Решение

а) Если предприниматель назначит цену $\$ P$ рублей за огурец, он продаст (и произведет) $\$ 100(9 - \frac{P}{9})$ огурцов. Выручка предпринимателя составит $\$ 100(9 - \frac{P}{9}) \cdot P$ рублей, а сумма понесенных им издержек будет равна $\$ 1 \cdot 100(9 - \frac{P}{9})$ рублей. Прибыль же, в свою очередь, составит $\pi(P) = 100(9 - \frac{P}{9})P - 100(9 - \frac{P}{9}) = 100(9 - \frac{P}{9})(P - 1)$ рублей.

Предприниматель назначит такую цену, чтобы прибыль была максимальна. Заметим, что график прибыли как функции от цены является параболой с ветвями вниз и корнями $\$ P = 1$ и $\$ P = 9$. Как известно, абсцисса вершины параболы находится ровно посередине между ее корнями (если они есть). Значит, оптимальная для фирмы цена

равна $\frac{9+1}{2}=5$ рублей за огурец.

б) Если теперь предприниматель назначит цену $9P$, его прибыль (за вычетом налога) составит $100(9-P)(P-1)-1 \cdot 100(9-P)=100(9-P)(P-2)$ рублей. Аналогично предыдущему пункту, получаем, что теперь оптимальной для предпринимателя будет цена $\frac{9+2}{2}=5,5$ рублей за огурец.

Таким образом, для фирмы является оптимальным переложить на потребителя не весь рубль налога, а лишь 50 копеек. Если бы фирма прибавила к цене целый рубль, это снизило бы объём спроса слишком сильно, и прибыль фирмы не была бы максимальной.

Заметим, что введение налога привело и к изменению выпуска фирмы – он сократился с 400 до 350 огурцов. Это произошло из-за того, что, введение налога по сути увеличило издержки фирмы на выпуск одного огурца с одного рубля до двух.

в) До введения налога прибыль фирмы равнялась $100(9-5)(5-1)=1600$ рублей. После введения налога прибыль уменьшилась до $100(9-5,5)(5,5-2)=100 \cdot 3,5^2=1225$ рублей. Таким образом, из-за введения налога прибыль фирмы уменьшилась на $1600-1225=375$ рублей.

С другой стороны, после введения налога фирма продала $100(9-5,5)=350$ огурцов, и значит, уплатила в бюджет 350 рублей.

Таким образом, в результате введения налога прибыль фирмы уменьшилась на 375 рублей, а в бюджет поступило лишь 350 рублей.

Куда «делись» 25 рублей?

Причиной этого расхождения является как раз то, что после введения налога фирма изменила выпуск. Поэтому прибыль предпринимателя частично уменьшилась еще до того, как произошла фактическая уплата суммы налога в бюджет. Если раньше фирма производила 40 огурцов и получала $5 \cdot 400 - 1 \cdot 400$ рублей прибыли, то теперь она произвела 35 огурцов и ее прибыль (еще до уплаты налога) составила $5,5 \cdot 350 - 1 \cdot 350 = 1575$ рублей (что как раз на 25 рублей меньше, чем 1600). Далее фирма выплатила 350 рублей налога, и в итоге ее потери составили те самые 375 рублей.

Таким образом, 25 рублей «не достались никому», эти потери возникли из-за того, что стимулы фирмы были искажены, и она изменила объем выпускаемой продукции после введения налога.

г) Если налог будет отменен, то фирма вновь сможет получать 1600 рублей прибыли, и ее прибыль вырастет на 375 рублей. Поэтому сделка будет выгодна фирме при $X < 375$. Чиновник же в случае отмены налога недополучит 350 рублей, ему сделка будет выгодна при $X > 350$. Таким образом, сделка будет выгодна обоим при $X \in (350; 375)$. Заметим, что существование значений X , выгодных для обоих, является как раз следствием того, что $350 < 375$, — следствием возникших в результате введения налога потерь в 25 рублей.

2. Метро и автомобиль

Каждый из 150 тыс. жителей города N-ска каждое утро решает, добираться ли ему на работу на метро или на автомобиле. На метро можно гарантированно добраться до работы за 60 минут, независимо от количества пассажиров. Время в пути на автомобиле, однако, тем больше, чем больше людей выбрали этот вид транспорта. Если n тысяч человек решили поехать на автомобиле, то каждый из них затратит на дорогу $10 + 0,5n$ минут. Для простоты будем считать, что время в пути – единственное, что учитывает житель при выборе способа передвижения.

(а) Сколько человек должны выехать на дорогу, чтобы суммарное время всех горожан на то, чтобы добраться до работы, было минимально? Назовем это количество водителей общественно оптимальным.

(б) Предположим, каждый человек точно оценивает количество водителей, выехавших на дорогу до него, и, независимо от других, решает, каким видом транспорта ему воспользоваться. Сколько человек поедут на автомобиле при таком независимом принятии решений?

Будет ли это количество водителей общественно оптимальным?

(в) Каждый житель города оценивает 1 минуту своего времени в 10 руб. Какую плату за въезд на дороги нужно ввести государству, чтобы в ситуации, описанной в пункте «б», количество водителей было общественно оптимальным?

Решение

а) Найдем суммарное время горожан на то, чтобы добраться на работу, как функцию от n — количества выехавших. Каждый из n тысяч человек затратит по $10 + 0,5n$ минут, еще $(150-n)$ тысяч человек поедут на метро и затратят по 60 минут. Таким образом, суммарное время составит

$$T(n) = n(10 + 0,5n) + 60(150 - n) = 0,5n^2 - 50n + 60 \cdot 150.$$

График данной функции является параболой с ветвями вверх, минимальное суммарное время достигается в ее вершине, то есть при $n=50$. Итак, общественно оптимальное количество водителей — 50 тыс. человек.

б) Как следует из условия, время, которое проведёт в пути данный водитель, зависит не только от того, сколько

водителей выехало до него, но и от того, сколько выедет после. Поэтому, принимая решение о виде транспорта, человек будет учитывать то, что случится после его выбора.

Может ли время в пути на автомобиле оказаться больше, чем на метро? Для этого необходимо, чтобы на дороги выехало больше 100000 жителей ($\$10+0,5\cdot 100=60\$$). Пусть это так. Рассмотрим человека, который выехал 100001-м. Как он рассуждал в момент своего выбора? Если он выедет на дорогу, то время, которое он проведёт в пути, точно будет как минимум $\$10+0,5\cdot 100,001\$$ минут, что больше 60 минут. Значит, он не мог выбрать автомобиль. Таким образом, 100001-й водитель не может существовать. Следовательно, число водителей не может быть больше 100 тыс.

[Показать продолжение пункта б\) \(версия lite\)](#)

[Показать продолжение пункта б\) \(версия advanced\)](#)

в) Если государство введет плату $\$t$, то выраженные в минутах общие издержки на дорогу для каждого автомобилиста составят $\$C(n)=10+0,5n+\frac{t}{10}\$$ минут.

Нам нужно, чтобы на дороги выехало ровно 50 тыс. человек. Для этого необходимо подобрать $\$t$ так, чтобы $\$C(50)\$$ было меньше 60, а $\$C(50001/1000)\$$ было больше 60. Из этих двух неравенств получаем, что нам подойдёт любое $\$t$, такое что $\$249,995$

3. Зеландия и Голландия

В Зеландии и Голландии из некоторого ресурса производятся зонтики и галоши. Зеландия обладает 100 единицами ресурса; Голландия – 500 единицами ресурса. Технологии производства в странах также отличаются, и они полностью определяют количество ресурса, необходимое для производства 1 зонтика или 1 галоши в каждой стране:

Страна	Затраты ресурса на 1 галошу	Затраты ресурса на 1 зонтик
Зеландия	2 единицы	1 единица
Голландия	1 единица	2 единицы

В обеих странах зонтики и галоши нужны в естественной пропорции 1:2 (зонтики и галоши традиционно используются в *комплектах* из одного зонтика и двух галош).

- (а) Допустим, страны не могут обмениваться ничем. Каково максимальное мировое производство комплектов?
(б) Допустим, страны могут обмениваться произведенными зонтиками и галошами, но не могут обмениваться ресурсом. Каково максимальное мировое производство комплектов?
(в) Допустим, страны могут обмениваться не только произведенными продуктами, но также и ресурсом. Каково максимальное мировое производство комплектов?
(г) И наконец, представим себе, что страны могут обмениваться всем: зонтиками, галошами, ресурсом, а главное – технологиями производства. Каково максимальное мировое производство комплектов?

Решение

а) Если страны полностью изолированы, то в Зеландии производство комплекта «стоит» $\$2\cdot 2+1\cdot 1=5\$$ единиц ресурса, а в Голландии — $\$2\cdot 1+1\cdot 2=4\$$ единицы ресурса. Значит, Зеландия сможет максимально произвести $\frac{100}{5}=20$ комплектов, а Голландия — $\frac{500}{4}=125$ комплектов. Таким образом, в мире может быть максимально произведено 145 комплектов.

б) Теперь для одного комплекта могут быть использованы зонтики и галоши, произведенные в разных странах. В зависимости от происхождения составляющих комплекта, издержки на один комплект могут быть разными. Минимально один комплект может обойтись в $\$2\cdot 1+1\cdot 1=3\$$ единицы ресурса — если зонтик зеландский, а галоши голландские. Следующий по дороговизне вариант — произвести комплект за 4 единицы ресурса, использовав как голландский зонтик, так и голландские галоши. Также можно произвести комплекты и за 5, и за 6 единиц ресурса (однако для дальнейшего решения нам эти варианты не понадобятся).

Количество произведенных комплектов будет максимально, если комплекты будут произведены с минимально возможными издержками. Таким образом, сначала надо произвести все комплекты стоимостью три. Таких комплектов можно произвести максимально 100 (ведь в Зеландии может быть произведено не более 100 зонтиков, при этом 200 галош в Голландии произвести можно). После этого в Голландии останется 300 единиц ресурса. Эти 300 единиц надо все потратить на производство комплектов стоимостью четыре (благо, для таких комплектов как раз нужны именно голландские зонтики и галоши). Всего таких комплектов можно будет произвести $\frac{300}{4}=75$. Значит, при возможности транспортировки зонтиков и галош максимально возможное производство комплектов будет уже не 145, а 175.

(Заметим, что, раз при появлении возможности обмена произошел рост произведенного в мире количества комплектов, можно привести пример торговли между странами, в ходе которой обеим станет лучше по сравнению с пунктом а). Действительно, пусть, как мы решили ранее, Зеландия произведет 100 зонтиков, а Голландия — произведет 350 галош и 75 зонтиков. Если теперь Голландия, к примеру, отдаст Зеландии 80 галош, а Зеландия взамен отдаст Голландии 60 зонтиков, то в итоге у Зеландии будет 40 комплектов, а у Голландии — 135, что для каждой из стран лучше, чем в ситуации предыдущего пункта).

в) Теперь и сам ресурс можно беспрепятственно транспортировать. Поэтому каждый зонтик и галошу можно произвести в той стране, где это обойдется дешевле — если для этого потребуется ресурс, его всегда можно привезти из другой страны (где мы все равно не будем производить этот зонтик или галошу в силу дороговизны). Значит, все зонтики надо будет производить в Зеландии, а все галоши — в Голландии. При этом стоимость каждого комплекта составит 3 единицы ресурса. Поскольку всего в мире есть 600 единиц ресурса, то максимально можно будет произвести $\frac{600}{3}=200$ комплектов, что больше 175.

(И опять же, поскольку $200 > 175$, можно привести пример торговли, при которой обеим странам будет лучше, чем в пункте б). Если Голландия сделает из 400 единиц своего ресурса 400 галош, отдаст 100 галош и 100 оставшихся единиц ресурса Зеландии, а та, в свою очередь, сделает из двухсот единиц ресурса 200 зонтиков и отдаст 150 зонтиков Голландии, то у Зеландии останется 50 комплектов, а у Голландии — 150 комплектов, что лучше, чем 40 и 135. Значит, появившаяся дополнительная возможность обмена может еще больше увеличить выгоды стран от торговли. Это весьма важно для таких дождливых провинций Нидерландов, как Зеландия и Голландия!)

г) В данной ситуации неважно, идет Магомед к горе или гора к Магомеду — неважно, ресурс «едет» к технологии, или технология к ресурсу. В обоих случаях каждая единица ресурса сможет быть потрачена на производство продукта с помощью наиболее экономичной (зеландской для зонтика или же голландской для галош) технологии. Таким образом, здесь возможность транспортировки технологий ничего не добавляет к мировым производственным возможностям по сравнению с пунктом в). Максимально возможное производство комплектов так же, как и в предыдущем пункте, составит 200.

4. Саша и Маша пекут пирог

Саша и Маша пекут пирог. Размер получившегося пирога π зависит как от усилий Саши, так и от усилий Маши: $\pi = e_C + e_M$, где e_C и e_M — усилия Саши и Маши соответственно. Готовый пирог затем разрезается на две части размером π_C и π_M , достающиеся, соответственно, Саше и Маше ($\pi_C + \pi_M = \pi$).

Итоговое удовольствие каждого зависит как от размера полученной части пирога, так и от затраченных усилий:

$$U_C = \pi_C - \frac{e_C^2}{4}, U_M = \pi_M - \frac{e_M^2}{8}$$

(а) Допустим, мама установила такие правила: каждый из ребят независимо друг от друга выбирает уровень усилий, а затем получившийся пирог делится между ними ровно пополам. Какие уровни усилий они выберут, максимизируя каждый свое удовольствие? Каков будет общий размер пирога?

(б) Может ли мама увеличить удовольствие каждого из ребят по сравнению с первоначальной ситуацией, принудительно устанавливая уровни усилий и затем собственноручно деля пирог в некоторой пропорции?

(в) Известно, что удовольствие мамы растёт, если увеличивается удовольствие одного из детей, и при этом не уменьшается удовольствие другого. Достаточно ли этой информации, чтобы определить, какие уровни усилий установит мама, максимизируя собственное удовольствие?

(г) Как-то раз мама задержалась на работе, и за главного остался папа. Он весь вечер смотрит футбол и поэтому не может наблюдать уровни усилий ребят; а раз так, то устанавливать их тоже бесполезно. Зато он может заранее объявить, в какой пропорции он будет делить между ребятами готовый пирог. Как и в пункте «а», предполагаем, что ребята выбирают уровни усилий независимо друг от друга.

Верно ли, что Саше будет в итоге тем лучше, чем больше предписанная ему доля? Верно ли, что, какова бы ни была первоначальная пропорция дележа, папа, переустанавливая ее, сделал бы одному из ребят хуже?

Решение

а) Размер части пирога, получаемый как Сашей, так и Машей, окажется равен $\frac{e_C + e_M}{2}$. Зная это, каждый будет выбирать свой уровень усилий так, чтобы его итоговое удовольствие было максимально. Сашино удовольствие будет равно

$$U_C = \frac{e_C + e_M}{2} - \frac{e_C^2}{4}.$$

Заметим, что график Сашиного удовольствия, как функции от его усилий, является параболой с ветвями вниз, причем абсцисса точки вершины этой параболы не зависит от значения усилий Маши и равна 1. Значит, какого бы уровня усилий Саша ни ожидал от Маши, ему будет выгодно выбрать уровень усилий, равный 1. Машино же итоговое удовольствие равно

$$U_M = \frac{e_C + e_M}{2} - \frac{e_M^2}{8}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, получаем, что независимо от усилий Саши Маше будет выгодно выбрать уровень усилий, равный 2.

В итоге они испекут пирог размером 3; итоговое удовольствие Саши будет равно $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, итоговое удовольствие Маши — $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

б) Да, это возможно. Если, например, мама установит уровни усилий $e_C = 2$ и $e_M = 4$, а затем отдаст 2,5 единицы пирога Саше, а 3,5 — Маше, то удовольствие Саши составит $2,5 - 1 = 1,5$, а удовольствие Маши — $3,5 - 2 = 1,5$. По сравнению с предыдущим пунктом, повысится удовольствие каждого. Почему получилось так, что в отсутствии мамы Саша и Маша сами не выбрали эти уровни усилий, испекли слишком маленький пирог, и попали в ситуацию, которую можно было бы улучшить для обоих?

Как и в задаче про пробки, ответ заключается в том, что, самостоятельно принимая решения об уровнях усилий, Саша и Маша учитывают только выгоду для себя, в то время как рост усилий одного приносит выгоду не только ему, но — через увеличившийся пирог — и другому. Здесь мы опять имеем дело с внешним эффектом, однако уже не отрицательным, а положительным. При принятии решения об усилиях Саша и Маша недоучитывают этот положительный эффект и стараются «слишком мало». В итоге неудивительно, что все заканчивается слишком маленьким пирогом и неэффективностью.

в) Информации для того чтобы определить, какие уровни усилий выберет мама, достаточно. Докажем, что, максимизируя собственное удовольствие, она точно выберет пару уровней усилий, при которой максимально суммарное удовольствие ребят.

Заметим, что суммарное удовольствие ребят как раз зависит только их уровней усилий, но не от конкретного распределения пирога:

$$U_C + U_M = e_C + e_M - \frac{e_C^2}{4} - \frac{e_M^2}{8} = \left(e_C - \frac{e_C^2}{4} \right) + \left(e_M - \frac{e_M^2}{8} \right).$$

Сумма удовольствий максимальна, если максимально выражение в каждой из скобок. Значит, уровни усилий, максимизирующие суммарное удовольствие ребят, равны $e_C = 2$ и $e_M = 4$. При этих уровнях усилий величина пирога составит 6, а максимальная сумма удовольствий будет равна 3.

Нам будет полезна следующая лемма, обобщающая результат пункта б):

Пусть пара уровней усилий $(e_C; e_M)$ не совпадает с парой (2;4), и пусть распределение пирога при уровнях усилий $(e_C; e_M)$ задано. Тогда при переходе от уровней усилий $(e_C; e_M)$ к уровням усилий (2;4) можно подобрать такое новое распределение пирога, что удовольствие каждого из ребят вырастет.

Доказательство:

Обозначим первоначальные уровни удовольствия за U_C и U_M . Заметим, что, раз пара $(e_C; e_M)$ не совпадает с парой (2;4), то $U_C + U_M < 3$. Дадим в новой ситуации кусок размером $\pi_M - U_M$ Маше и кусок размером $2 + \pi_M - U_M$ — Саше. Удовольствие каждого вырастет по сравнению с первоначальной ситуацией тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \pi_M - 2 > U_M; \\ 6 - \pi_M - 1 > U_C, \end{cases}$$

что эквивалентно $U_M + 2 < \pi_M < 5 - U_C$. Иными словами, мы сможем добиться роста удовольствия каждого, если подберем π_M , удовлетворяющее неравенству $U_M + 2 < \pi_M < 5 - U_C$. Однако $U_C + U_M < 3$, и поэтому $U_M + 2 < 5 - U_C$. В силу этого, подобрать нужное значение π_M всегда можно. Лемма доказана.

Доказанная лемма означает, что если уровни усилий не совпадают с (2;4), то всегда можно увеличить удовольствие обоих — для этого надо перейти к уровням усилий (2;4) и специальным образом распределить пирог (что мы, кстати, и сделали в пункте б)). Но раз при этом увеличится удовольствие обоих, то увеличится и удовольствие мамы.

Значит, пока пара усилий не совпадает с (2;4), всегда остается возможность для увеличения удовольствия мамы.

Таким образом, максимизируя собственное удовольствие, мама обязательно установит уровни усилий $e_C = 2$ и $e_M = 4$.

г) Аналогично пункту а), найдем, какие уровни усилий выберут ребята, и какое в итоге удовольствие они получат, если папа предпишет долю α пирога Саше, а $(1 - \alpha)$ — Маше. Саша будет максимизировать величину $\alpha(e_C + e_M) - \frac{e_C^2}{4}$ и выберет $e_C = 2\alpha$. Маша будет

максимизировать величину $(1-\alpha)(e_C + e_M) \cdot \frac{e_M^2}{8}$ и выберет $e_M = 4(1-\alpha)$. Подставляя эти объемы усилий в функции удовольствия ребят, получаем, что в итоге удовольствие Саши составит $U_C = 4\alpha - 3\alpha^2$, а удовольствие Маши будет равно $U_M = 2(1-\alpha)$.

Заметим, что удовольствие Саши не является монотонной функцией от α . Действительно, функция $U_C = 4\alpha - 3\alpha^2$ растёт по α лишь при $\alpha < \frac{2}{3}$. Достигая максимума в этой точке, она затем начинает убывать. Значит, неверно, что удовольствие Саши тем больше, чем больше предписанная ему доля: например, если доля Саши вырастет с $\frac{2}{3}$ до 1, то его удовольствие только снизится.

Как объяснить этот «парадокс»? Дело в том, что абсолютный результирующий размер пирога равен $4-2\alpha$, и он убывает с ростом доли Саши. Когда доля Саши растёт, доля Маши падает, и она начинает прилагать меньше усилий, что перекрывает эффект от увеличения усилий Саши: размер испеченного пирога падает. В итоге получаем, что с ростом α Саша начинает получать большую долю, но от меньшего пирога. Неудивительно, что иногда это может приводить к снижению итогового удовольствия Саши.

Такая немонотонная зависимость удовольствия Саши от его доли дает возможность построения примера, когда изменение предписанных ребятам долей сделает лучше обоим: например, если изначально доля Саши была равна 1, то снижение ее до $\frac{2}{3}$ увеличит удовольствие Маши с нуля $\frac{2}{3}$ и увеличит удовольствие Саши с 1 до $\frac{4}{3}$.

5. Подарки в Андер-Арченске

Жители города Андер-Арченска любят радовать друг друга подарками. Каждый из жителей дарит ровно один подарок в месяц. По традиции жители предпочитают не вручать подарки лично, а пользоваться службой экспресс-доставки.

Жители делятся на две группы: богатые и бедные; в каждой из групп по тысяче человек.

Если богатый житель воспользуется экспресс-доставкой по цене P руб., то его удовольствие будет на $55-P$ единиц выше, чем если бы он вручил подарок лично. Таким образом, если цена доставки будет выше 55, то он предпочтёт вручить подарок лично.

Если бедный житель воспользуется экспресс-доставкой по цене P руб., то его удовольствие будет на $25-P$ единиц выше, чем если бы он вручил подарок лично. Таким образом, если цена доставки будет выше 25, то он предпочтёт вручить подарок лично.

Для определённости будем считать, что если цена такова, что жителю безразлично, вручать подарок самому или воспользоваться услугами фирмы, он выберет второе.

Издержки фирмы на доставку одного подарка равны 5 руб.

Фирма знает всю описанную выше информацию о каждой из групп жителей, но по внешнему виду обращающегося к ней клиента не может определить, к какой из двух групп он принадлежит, и поэтому она вынуждена назначать для всех клиентов одну и ту же цену.

(а) Какую цену на экспресс-доставку назначит фирма, стремящаяся максимизировать прибыль?

(б) Как-то раз к владельцу фирмы пришёл знакомый предприниматель со следующими словами:

«За 19 тыс. руб. в месяц ты можешь арендовать у меня прибор, который позволяет точно узнавать тип жителя по его внешнему виду.

А ещё знай, что у меня есть склад, и если ты будешь платить мне 3 тыс. руб. в месяц, то я могу хранить там посылки по цене 5 руб. за штуку; тогда ты сможешь оказывать новую услугу – доставку с задержкой. Приросты удовольствия по сравнению с личным вручением подарка здесь другие: $25-P$ для богатых жителей и $20-P$ для бедных, где P – цена доставки с задержкой. Что-то мне подсказывает, что склад может тебе пригодиться. Но решай сам; моё дело – предложить».

Предположим, что предприниматель предоставил правдивую информацию. Также предположим, что если цены таковы, что жителю безразлично, каким из видов доставки пользоваться, то он выберет экспресс-доставку. Какими из двух предложений предпринимателя воспользуется фирма: только первым, только вторым, обоими или никаким?

Решение

Для краткости обозначим $N=1000$.

а) Богатые будут заказывать экспресс-доставку при цене не выше 55, бедные — при цене не выше 25. Цена $P < 25$ не может быть оптимальна для фирмы, так как такую цену можно повысить до 25, тогда фирма окажет столько же услуг доставки, но при этом ее выручка повысится. Аналогично, цена 25 Сравним значения прибыли при установлении цены 25 и цены 55:

$$(55 - 5)N \vee (25 - 5) \cdot 2N \\ 50N > 40N$$

Значит, фирме выгоднее установить цену 55 (и обсуживать только богатых). Прибыль фирмы составит при этом $50N$.

б) Если фирма арендует прибор (воспользуется только первым предложением), то она сможет устанавливать разные цены для разных групп. Ясно, что тогда нужно будет установить для бедных цену 25, а для богатых — 55. При этом прибыль фирмы с учётом затрат на аренду прибора составит $(25-5)N + (55-5)N - 19N = 51N$, что больше, чем в пункте а).

Заметим, однако, что если у фирмы есть прибор, то склад ей уже не нужен. Действительно, продавая доставку с задержкой, фирма сможет взять с богатых максимум 25 рублей, а с бедных — 20 рублей, что меньше цен за экспресс-доставку, которые она может назначить для этих групп, если у нее есть прибор. Таким образом, если у фирмы есть прибор, то дополнительных выгод от склада никаких, зато появляются дополнительные издержки. Поэтому фирма точно не воспользуется двумя предложениями одновременно.

Какие же выгоды получит фирма, если воспользуется только складом (вторым предложением)?

Заметим, что, если фирма им воспользуется, ей будет невыгодно предлагать только доставку с задержкой. Действительно, она всегда может получить более высокую прибыль, предложив вместо этого экспресс-доставку по той же цене: все, кто покупал за эту цену доставку с задержкой, согласятся купить по этой цене экспресс-доставку (ведь для всех экспресс-доставка приносит ещё большее удовольствие, чем доставка с задержкой), но фирме теперь не придётся платить за хранение подарков.

Если же продавать только экспресс-доставку, то склад фирме вообще не нужен. Значит, единственный шанс получить выгоду от склада — оказывать обе услуги.

Пусть P_0 \$ — цена экспресс-доставки, P_1 \$ — цена доставки с задержкой.

Богатые предпочтут экспресс, если $P_0 - P_1 \leq 30$.

Бедные предпочтут экспресс, если $P_0 - P_1 \leq 5$.

Заметим, что если бедные предпочитают экспресс, то и богатые тоже. Поэтому, коли мы выяснили, что должны оказывать обе услуги, то цены должны быть такими, чтобы бедные предпочитали задержку, а богатые — экспресс: $P_0 - P_1 = 5$

Таким образом, фирма выбирает значения P_0 и P_1 из множества, описываемого системой неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 - P_1 \leq 30 \\ P_0 - P_1 \leq 5 \end{array} \right.$$

так, чтобы ее прибыль $\pi = (P_0 - 5)N + (P_1 - 5)N - 3N$ была максимальна.

Покажем, что хотя бы одно из неравенств $P_0 \leq 55$, $P_1 \leq 20$ выполнено как равенство. Предположим, что это не так, и оба они выполнены как строгие неравенства. Увеличим обе цены на одинаковую маленькую величину. Все неравенства нашей системы при этом продолжают выполняться (то есть новые цены принадлежат допустимому множеству), однако прибыль вырастет — значит, изначальная ситуация не была оптимумом.

Итак, в оптимуме хотя бы одно из неравенств $P_0 \leq 55$, $P_1 \leq 20$ выполнено как равенство. Однако из условий $P_0 - P_1 \leq 30$ и $P_1 \leq 20$ получаем, что $P_0 \leq 30 + P_1 \leq 30 + 20 = 50$.

Значит, P_0 \$ не может равняться 55. Таким образом, как равенство может быть выполнено только неравенство $P_1 \leq 20$. Итак, $P_1 = 20$.

Значит, $P_0 = 5$

В итоге получаем, что для фирмы является оптимальным установить цены $P_0 = 50$ и $P_1 = 20$. Прибыль при этом составит $52N$, что больше, чем в случае аренды прибора, и тем более больше, чем в пункте а). Значит, фирма воспользуется только вторым предложением.